Consiglio Nazionale delle Ricerche

PUBBLICAZIONE AI SENSI DELL'ART. 19 DEL D.LGS. N. 33 DEL 14 MARZO 2013, MODIFICATO DALL'ART. 18 DEL D.LGS N. 97 DEL 25 MAGGIO 2016 INTEGRATO DALL'ART.1 C. 145 DELLA LEGGE 27 DICEMBRE 2019 N. 160

BANDO N. 368.47 RIC – AREA STRATEGICA MATEMATICA APPLICATA

CONCORSO PUBBLICO, PER TITOLI ED ESAMI, PER L'ASSUNZIONE CON CONTRATTO DI LAVORO A TEMPO PIENO E INDETERMINATO DI N. 3 UNITÀ DI PERSONALE PROFILO RICERCATORE - III LIVELLO PROFESSIONALE - PRESSO STRUTTURE DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

TRACCE DELLE PROVE D'ESAME ESTRATTE A SORTE

prima prova scritta

Tracce prima prova

Serie di tracce B

Il/La candidato/a svolga uno dei seguenti temi.

B1) Si dia un esempio di problema applicativo delle scienze o della tecnologia che possa essere modellizzato tramite equazioni alle derivate parziali o/e tramite il calcolo delle variazioni. Se ne discutano problemi modellistici e tecniche analitiche.

B2) Per un problema di programmazione lineare intera (PLI):

a. fornire la generica formulazione;
b. fornire le definizioni di valid inequality e convex hull;
c. presentare possibili lower e upper bounds;
d. fornire almeno un esempio di applicazione di problema di PLI.

B3) Si discutano alcuni aspetti del concetto di stabilità per metodi numerici nella matematica applicata.

seconda prova scritta – SERIE DI ESERCIZI "D"

Il/La candidato/a svolga una delle seguenti tracce.

Esercizio D.1 Si consideri il problema differenziale ai limiti

$$-\alpha u''(x) + \beta u'(x) = 1, \quad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

(i) Si tracci il grafico della soluzione $u(x)$ al variare dei parametri α e β.

(ii) Suddiviso l'intervallo [0,1] con passo uniforme $h = 1/N$, (N intero, $N \geq 2$), si indichi con $x_i = ih$ l'i-esimo punto della suddivisione. Si consideri il seguente schema alle differenze finite:

$$\alpha \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + \beta \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 1, \qquad u_0 = u_N = 0,$$

dove u_i, $i = 0, \ldots, N$, rappresenta l'approssimazione della soluzione $u(x)$ nel punto x_i.

Si discutano le sue caratteristiche al variare dei parametri α e β.

(iii) Nel caso $\alpha \ll |\beta|$, si proponga un metodo alternativo (non necessariamente alle differenze finite), motivandone la scelta.

Esercizio D.2 Si consideri uno specifico problema di ottimizzazione e:

- si descriva in modo strutturato (ad esempio con diagramma blocchi, oppure in pascal-like, oppure per passi) un algoritmo risolutivo esatto;
- si presenti il processo di test e validazione dell'algoritmo (istanze e tipo di sperimentazioni), spiegandone la logica e gli obiettivi;
- si presenti, in forma generica, la struttura di una o più tabelle di risultati.

Esercizio D.3

A. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dire per quali $\alpha > 0$ e $L > 0$ la condizione

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^{\alpha} \text{ per ogni } x, y$$

garantisce l'esistenza di un punto fisso per f.

B. Determinare esistenza ed andamento asintotico delle soluzioni globali $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u = u(t)$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = t^3 u^2 \cos^2 u \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

in dipendenza del dato iniziale.

TRACCE DELLE PROVE D'ESAME NON ESTRATTE

Tracce prima prova

Serie di tracce A

Il/La candidato/a svolga uno dei seguenti temi

A1) Per un problema di programmazione lineare (PL):

a. fornire la generica formulazione;
b. discutere le assunzioni su cui si fonda un problema di PL;
c. formulare le principali proprietà di cui gode un problema di PL;
d. fornire almeno un esempio di applicazione di problema di PL.

A2) Si consideri un problema applicativo nell'ambito delle scienze o dell'ingegneria e se ne presenti un modello matematico. Si proponga un metodo appropriato per la sua risoluzione numerica, mettendone in luce le proprietà, eventuali limiti e possibili rimedi.

A3) La convoluzione e sue applicazioni.

Tracce prima prova

Serie di tracce C

Il/La candidato/a svolga uno dei seguenti temi.

C1) Si discutano aspetti teorici e implementativi di metodi numerici per l'approssimazione della soluzione di equazioni alle derivate parziali ellittiche.

C2) Proiezioni in spazi di Hilbert e applicazioni.

C3) Si consideri un contesto applicativo da cui sorga un problema di ottimizzazione e quindi:

a. descrivere il contesto applicativo considerato;
b. fornire una descrizione e formulazione del problema di ottimizzazione;
c. discutere vantaggi e limiti del problema di ottimizzazione per il contesto applicativo considerato;
d. discutere la relazione fra la soluzione del problema di ottimizzazione e altri aspetti del contesto applicativo.

Consiglio Nazionale delle Ricerche

BANDO N. 368.47 RIC – AREA STRATEGICA MATEMATICA APPLICATA

CONCORSO PUBBLICO, PER TITOLI ED ESAMI, PER L'ASSUNZIONE CON CONTRATTO DI LAVORO A TEMPO PIENO E INDETERMINATO DI N. 3 UNITÀ DI PERSONALE PROFILO RICERCATORE - III LIVELLO PROFESSIONALE - PRESSO STRUTTURE DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

TRACCE DELLE PROVE D'ESAME

NON ESTRATTE PER SECONDA PROVA SCRITTA:

SERIE DI ESERCIZI "E"

SERIE DI ESERCIZI "F"

Il/La candidato/a svolga una delle seguenti tracce.

Esercizio E.1 Sia A una matrice a coefficienti reali definita positiva e si consideri il problema ai valori iniziali

$$Y'(t) = -AY(t) + F(t), \quad t > 0, \qquad Y(0) = Y^0. \tag{1}$$

Siano poi A_1, A_2 due matrici definite positive tali che $A = A_1 + A_2$. Per un passo di discretizzazione $\Delta t > 0$, si definisca $t_n = n\Delta t$, $n \geq 0$. Sia inoltre $U^0 = Y^0$. Si consideri il seguente schema per l'approssimazione di (1):

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} + A_1 U^{n+1/2} + A_2 U^n &= F^{n+1/2} \\ \frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} + A_1 U^{n+1/2} + A_2 U^{n+1} &= F^{n+1/2}, \end{aligned}$$

con $n \geq 0$, $\tau = \Delta t/2$ e $F^{n+1/2} = F(t_n + \tau)$.

(i) Si determini l'ordine dell'errore di troncamento locale dello schema.

[*suggerimento*: si elimini $U^{n+1/2}$]

(ii) Si discuta in quali casi uno schema di questo tipo può essere conveniente.

(iii) Nel caso in cui F sia indipendente dal tempo, lo schema proposto può essere usato come schema iterativo per la risoluzione del problema stazionario

$$AY = F.$$

Se ne dimostri la convergenza. Come è ragionevole scegliere τ in questo caso?

Esercizio E.2 Si consideri uno specifico problema di ottimizzazione e:

- si descriva in modo strutturato (ad esempio con diagramma blocchi, oppure in pascal-like, oppure per passi) un algoritmo euristico di tipo local search;
- si presenti il processo di test e validazione dell'algoritmo (istanze e tipo di sperimentazioni), spiegandone la logica e gli obiettivi;
- si presenti, in forma generica, la struttura di una o più tabelle di risultati.

Esercizio E.3 A. Sia $\alpha > 0$. Determinare se esiste il minimo

$$\min\Big\{\sum_{k=1}^{N} |x_k|^\alpha : N \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{N} x_k = 1\Big\},$$

e calcolarlo.

B. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana, $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Discutere l'esistenza di una successione $\{x_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ tale che

$$\begin{cases} x_{k+1}^n = x_k^n + \frac{1}{n} f(x_{k+1}^n) \\ x_0^n = x_0. \end{cases}$$

Definita la funzione costante a tratti $u_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ da $u_n(t) = x_k^n$ se $k \leq nt < k+1$, discutere la convergenza di u_n per $n \to +\infty$ e caratterizzarne il limite.

Il/La candidato/a svolga una delle seguenti tracce.

Esercizio F.1 Dato il sistema di equazioni differenziali per $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \qquad t > t_0 \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}^0, \end{aligned}$$

e data una sua discretizzazione mediante lo schema di Eulero implicito

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}), \qquad n \geq 0, \qquad \mathbf{u}^0 = \mathbf{y}^0,$$

dove $\tau > 0$ è il passo di discretizzazione, $t_n = t_0 + n\tau$, e $\mathbf{u}^n$ è l'approssimazione di $\mathbf{y}(t)$ al tempo t_n, il candidato discuta i seguenti casi:

(i) Dato il sistema

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -\frac{t}{2} y_1(t) + t y_2(t) \\ y_2'(t) &= (1-t) y_1(t) - \frac{t}{2} y_2(t), \qquad t > t_0 = 1, \end{aligned}$$

si dimostri che la soluzione verifica

$$|y_1(t)|^2 + |y_2(t)|^2 \leq |y_1^0|^2 + |y_2^0|^2.$$

Si dimostri che la soluzione approssimata con il metodo di Eulero implicito verifica

$$|u_1^n|^2 + |u_2^n|^2 \leq |u_1^0|^2 + |u_2^0|^2,$$

e si commenti il risultato.

(ii) Dato il sistema

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= -k^2 y_1(t), \qquad t > t_0 = 0, \end{aligned}$$

si dimostri che $\frac{1}{2}k^2|y_1(t)|^2 + \frac{1}{2}|y_2(t)|^2$ è invariante in tempo.

Introdotto lo schema di Eulero implicito, cosa si può dire dell'analoga proprietà per la soluzione approssimata e delle conseguenze sul suo comportamento?

Esercizio F.2 Si consideri uno specifico problema di ottimizzazione e:

- si descriva in modo strutturato (ad esempio con diagramma blocchi, oppure in pascal-like, oppure per passi) un algoritmo euristico ispirato a uno schema metaeuristico;
- si presenti il processo di test e validazione dell'algoritmo (istanze e tipo di sperimentazioni), spiegandone la logica e gli obiettivi;
- si presenti, in forma generica, la struttura di una o più tabelle di risultati.

Esercizio F.3 A. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \left| x \sin\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right) \right|^{\beta}$$

Dire per quali α, β il grafico di f ha lunghezza finita.

B. Discutere l'esistenza o meno delle soluzioni del problema di minimo

$$\min\left\{ \int_{-1}^{1} |x||u'(x)|^2 \, dx : u \in C^1(-1,1) \cap C^0([-1,1]) \; u(-1) = 0, \; u(1) = 2 \right\}.$$